D'où $f(z)=0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$

$\Leftrightarrow z+2i=0$ Ou $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

*Résolution de l'équation $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta' = \sqrt{3}^2-4=-1=i^2$ Donc $\delta = i$

Par suite : $z_1=\sqrt{3}-i$ et $z_2=\sqrt{3}+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-2i,\sqrt{3}+i,\sqrt{3}-i\}$

● a) $w=\dfrac{z_1}{z_0}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\dfrac{(\sqrt{3}-i).i}{(-2i).i}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) aff$(\overrightarrow{OM})=z$

aff$(\overrightarrow{M_2M_1})=wz-w^2z=z.(w-w^2)=z(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{2\pi}{3}})$

$=z.(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2})=z$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_2M_1} \Longrightarrow$ OMM_1M_2 est un parallélogramme **(1)**

Aussi on a : $OM=|z|$

$OM_2=|wz|=|z||w|=|z|$

D'où $OM=OM_2$ **(2)**

(1) + (2) donne : OMM_1M_2 est un losange

Exercice n° 15

$\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

$(E):(1+iz)^3(1-itg\theta)=(1-iz)^3(1+itg\theta)$

● a) z solution de (E) $\Leftrightarrow$

$(1+i\,z)^3.(1-itg\,\theta)=(1-i\,z)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow |(1+i\,z)^3||1-itg\,\theta|=|(1-i\,z)^3||1+itg\,\theta|$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}=|1-iz|^3.\sqrt{1+tg^2\theta}$

$\Leftrightarrow |1+iz|^3=|1-iz|^3 \Leftrightarrow \boxed{|1+iz|=|1-iz|}$

b) posons $z=x+i\,y$; $x\in IR$ et $y\in IR$

$|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow |1+i(x+iy)|=|1-i(x+iy)|$

$\Leftrightarrow |1-y+ix|=|1+y-ix|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2+x^2}=\sqrt{(1+y)^2+x^2}$

$\Leftrightarrow (1-y)^2+x^2=(1+y)^2+x^2$

$\Leftrightarrow (1-y)^2=(1+y)^2$

$\Leftrightarrow -2y=2y \Leftrightarrow y=0$

Donc $|1+iz|=|1-iz| \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow z$ est réel

● a) $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\dfrac{\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta-i\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$

Donc $\boxed{\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$

b) $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ [posons $z=tg\,\alpha$ et remplaçant z dans l'équation (E) on aura pour $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$(1+i\,tg\,\alpha)^3.(1-itg\,\theta)=(1-i\,tg\,\alpha)^3.(1+itg\,\theta)$

$\Leftrightarrow$

$(\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha})^3=\dfrac{1+itg\theta}{1-itg\theta} \Leftrightarrow (e^{2i\alpha})^3=e^{2i\theta}$

$\Leftrightarrow e^{6i\alpha}=e^{2i\theta} \Leftrightarrow 6\alpha=2\theta+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

On sait que $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{6}\prec-\dfrac{\theta}{3}\prec\dfrac{\pi}{6}\ (1) \\ -\dfrac{\pi}{2}\prec\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{\pi}{2}\ (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Longrightarrow -\dfrac{2\pi}{3}\prec\dfrac{k\pi}{3}\prec\dfrac{2\pi}{3} \Longrightarrow -2<k<2$

D'où $k\in\{-1,0,1\}$ on a alors pour :

- $k=0 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}$
- $k=1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3}$
- $k=-1 \Longrightarrow \alpha=\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3}$

Finalement : $S_{\mathbb{C}}=\{tg\dfrac{\theta}{3};tg(\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{\pi}{3});tg(\dfrac{\theta}{3}-\dfrac{\pi}{3})\}$

Exercice n° 16

● les racines cubiques de u sont les solutions de :

$z^3=u$ Or $u=4\sqrt{2}(-1+i)=8e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$z^3=8e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow z_k=2e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})}$ avec $k\in\{0,1,2\}$

Oarray.tn Mara Blech Oarray.tn Oarray.tn Mara Blech Oarray.tn